त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» त्रिविमीय ज्यामिति की आवश्यकता

प्रश्न 1 (आसान). एक फुटबॉल मैदान पर सिर्फ़ लंबाई और चौड़ाई से किसी खिलाड़ी की जगह बताने में क्या कमी है?
उत्तर – यह नहीं बता सकते कि खिलाड़ी ज़मीन पर है या कूद रहा है।

प्रश्न 2 (आसान). अगर कोई आपसे कहे कि 'मेरा घर बस स्टैंड से 50 मीटर दूर है', तो क्या आप तुरंत घर पहुँच जाएँगे? क्यों नहीं?
उत्तर – नहीं, क्योंकि यह नहीं पता कि 50 मीटर किस दिशा में - आगे, पीछे, दाएं, बाएं, या ऊपर-नीचे। तीसरी दिशा की जानकारी नहीं है।

प्रश्न 3 (मध्यम). एक पक्षी पेड़ की सबसे ऊंची डाली पर बैठा है। उसकी पोजीशन बताने के लिए कौन से तीन माप ज़रूरी होंगे?
उत्तर – ज़मीन से ऊंचाई, पेड़ के तने से एक दिशा में दूरी, और पेड़ के तने से दूसरी दिशा में दूरी (जो पहली दिशा के लंबवत हो)।

प्रश्न 4 (कठिन). क्या ऐसा संभव है कि दो अलग-अलग चीज़ें 2D प्लेन में एक ही जगह पर हों, लेकिन 3D स्पेस में उनकी जगह अलग-अलग हो? उदाहरण देकर समझाओ।
उत्तर – हाँ, बिल्कुल संभव है। जैसे एक बहुमंज़िला इमारत में, पहली मंज़िल पर एक फ्लैट (x,y) पर है और तीसरी मंज़िल पर दूसरा फ्लैट भी (x,y) पर हो सकता है (अगर हम ऊपर से देखें)। लेकिन 3D में उनकी z-वैल्यू (मंज़िल की ऊंचाई) अलग होगी, जैसे (x,y,1) और (x,y,3)।

» त्रिविमीय अंतरिक्ष में निर्देशांक्ष और निर्देशांक-तल

प्रश्न 5 (आसान). जो तीन अक्ष एक दूसरे पर लंबवत होते हैं, उन्हें क्या कहते हैं?
उत्तर – x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष

प्रश्न 6 (आसान). xy-तल किन दो अक्षों से मिलकर बनता है?
उत्तर – x-अक्ष और y-अक्ष

प्रश्न 7 (मध्यम). YZ-तल में किसी बिंदु का x-निर्देशांक क्या होगा?
उत्तर – शून्य (0)

प्रश्न 8 (कठिन). अंतरिक्ष में एक बिंदु (5, 0, 7) किस तल में स्थित है?
उत्तर – XZ-तल

» अष्टांश और उनके चिन्ह

प्रश्न 9 (आसान). बिंदु (1, 2, 3) किस अष्टांश में है?
उत्तर – I अष्टांश

प्रश्न 10 (आसान). बिंदु (-4, 1, 6) किस अष्टांश में है?
उत्तर – II अष्टांश

प्रश्न 11 (मध्यम). बिंदु (5, -3, -2) किस अष्टांश में है?
उत्तर – VIII अष्टांश

प्रश्न 12 (कठिन). बिंदु (-7, -8, -1) किस अष्टांश में है?
उत्तर – VII अष्टांश

» अंतरिक्ष में एक बिंदु के निर्देशांक

प्रश्न 13 (आसान). एक बिंदु 'X-अक्ष' पर स्थित है। उसके 'y' और 'z' निर्देशांक क्या होंगे?
उत्तर – y = 0, z = 0

प्रश्न 14 (आसान). बिंदु (0, 0, 0) को क्या कहते हैं?
उत्तर – मूल बिंदु (Origin)

प्रश्न 15 (मध्यम). अगर एक बिंदु 'YZ-plane' में है, तो उसका 'x-coordinate' क्या होगा?
उत्तर – x = 0

प्रश्न 16 (कठिन). बिंदु P(4, -2, 3) कौन से 'octant' में होगा? (याद करो 'signs' की टेबल!)
उत्तर – चौथे 'octant' में, क्योंकि x positive, y negative, z positive है।

» निर्देशांक्षों पर और निर्देशांक-तलों में बिंदु

प्रश्न 17 (आसान). वह बिंदु जिसके x-निर्देशांक और z-निर्देशांक दोनों शून्य हों, वह किस अक्ष पर होगा?
उत्तर – y-अक्ष पर

प्रश्न 18 (आसान). एक बिंदु (0, 7, 0) किस अक्ष पर स्थित है?
उत्तर – y-अक्ष पर

प्रश्न 19 (मध्यम). एक बिंदु के निर्देशांक (5, 0, -3) हैं। यह किस तल में स्थित है?
उत्तर – xz-तल में

प्रश्न 20 (कठिन). वह बिंदु जो xy-तल में है और जिसका x-निर्देशांक 4 है और y-निर्देशांक -2 है, उसके पूर्ण निर्देशांक क्या होंगे?
उत्तर – (4, -2, 0)

» त्रिविमीय अंतरिक्ष में दो बिंदुओं के बीच की दूरी

प्रश्न 21 (आसान). बिंदुओं (0,0,0) और (3,4,5) के बीच की दूरी ज्ञात करें।
उत्तर – $(3^2+4^2+5^2) = (9+16+25) = 50 = 52$

प्रश्न 22 (आसान). बिंदुओं (1,0,0) और (4,0,0) के बीच की दूरी ज्ञात करें।
उत्तर – $((4-1)^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2) = (3^2) = 3$

प्रश्न 23 (मध्यम). बिंदुओं A(2, 3, 5) और B(4, 3, 1) के बीच की दूरी ज्ञात करें।
उत्तर – $((4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2) = (2^2 + 0^2 + (-4)^2) = (4+0+16) = 20 = 25$

प्रश्न 24 (कठिन). यदि एक बिंदु P(x, y, z) की मूल बिंदु (0,0,0) से दूरी 10 इकाई है, तो $x^2+y^2+z^2$ का मान क्या होगा?
उत्तर – मूल बिंदु से दूरी का सूत्र है $(x^2+y^2+z^2) = 10$। दोनों तरफ वर्ग करने पर $x^2+y^2+z^2 = 10^2 = 100$।

» दूरी सूत्र का अनुप्रयोग: संरेखीयता और त्रिभुजों के प्रकार

प्रश्न 25 (आसान). क्या बिंदु P(1, 1, 0), Q(1, 0, 1) और R(0, 1, 1) एक त्रिभुज बनाते हैं?
उत्तर – हाँ, ये एक त्रिभुज बनाते हैं क्योंकि PQR की दूरियाँ PQ = sqrt(2), QR = sqrt(2), PR = sqrt(2) हैं और किन्हीं दो दूरियों का योग तीसरी से बड़ा है (sqrt(2) + sqrt(2) > sqrt(2))।

प्रश्न 26 (आसान). बिंदुओं (1, 2, 3) और (1, 2, 5) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 2 इकाई

प्रश्न 27 (मध्यम). जाँच कीजिए कि बिंदु (3, -1, 2), (1, 2, -4) और (-1, 1, 2) संरेखीय हैं या नहीं।

उत्तर – ये संरेखीय नहीं हैं।

प्रश्न 28 (कठिन). दर्शाइए कि बिंदु A(1, 2, 3), B(-1, -2, -1) और C(2, 3, 2) एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उत्तर – AB = 6, BC = sqrt(43), CA = sqrt(3), AB²+CA² ≠ BC², BC²+CA² ≠ AB², AB²+BC² ≠ CA²। कोई भी दो भुजाएं बराबर नहीं हैं, ना ही पाइथागोरस प्रमेय लागू हो रहा है। अतः, ये एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के शीर्ष नहीं हैं।

» दूरी सूत्र का अनुप्रयोग: ज्यामितीय आकृतियों के शीर्ष

प्रश्न 29 (आसान). क्या बिंदु P(0,0,0), Q(1,0,0), R(1,1,0), S(0,1,0) एक आयत के शीर्ष हैं?

उत्तर – हां

प्रश्न 30 (आसान). बिंदु (1,1,1) और (1,1,0) के बीच की दूरी क्या है?

उत्तर – 1 इकाई

प्रश्न 31 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि बिंदु A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(3, 5, 4) और D(2, 3, 1) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

उत्तर – AB = $\sqrt{14}$, BC = $\sqrt{5}$, CD = $\sqrt{14}$, DA = $\sqrt{5}$. सम्मुख भुजाएं बराबर हैं (AB=CD, BC=DA), अतः यह एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 32 (कठिन). बिंदु E(0, 0, 0), F(a, 0, 0), G(a, b, 0), H(0, b, 0) एक आयत के शीर्ष हैं। सिद्ध कीजिए।

उत्तर – EF = $\sqrt{a^2} = |a|$, FG = $\sqrt{b^2} = |b|$, GH = $\sqrt{a^2} = |a|$, HE = $\sqrt{b^2} = |b|$. EF=GH और FG=HE, तो समांतर चतुर्भुज है। EG = $\sqrt{a^2+b^2}$, FH = $\sqrt{a^2+b^2}$. EG=FH, तो आयत है।

» बिंदु-समुच्चय का समीकरण

प्रश्न 33 (आसान). उन बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु C(0,0,0) और D(2,0,0) से समदूरस्थ हैं।

उत्तर – x = 1

प्रश्न 34 (आसान). बिंदुओं P(x,y,z) से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी बिंदुओं E(1,0,0) और F(-1,0,0) से दूरी समान है।

उत्तर – x = 0

प्रश्न 35 (मध्यम). उन बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु G(1,1,1) और H(3,3,3) से समदूरस्थ हैं।

उत्तर – x + y + z = 6

प्रश्न 36 (कठिन). बिंदुओं P(x,y,z) से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं K(4,0,0) और L(-4,0,0) से दूरियों का योगफल 10 है।

उत्तर – $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

» त्रिभुज का केंद्रक

प्रश्न 37 (आसान). शीर्ष A(0,0,0), B(3,0,0) और C(0,3,0) वाले त्रिभुज का केंद्रक ज्ञात कीजिए।

उत्तर – (1,1,0)

प्रश्न 38 (आसान). अगर एक त्रिभुज के शीर्ष P(1,2,3), Q(4,5,6) और R(7,8,9) हैं, तो केंद्रक G के निर्देशांक क्या होंगे?
उत्तर – (4,5,6)

प्रश्न 39 (मध्यम). त्रिभुज XYZ का केंद्रक (2,2,2) है। यदि X(1,1,1) और Y(3,3,3) हैं, तो Z के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (2,2,2)

प्रश्न 40 (कठिन). एक त्रिभुज के शीर्ष A(a,b,c), B(a,-b,c) और C(-a,b,-c) हैं। इस त्रिभुज का केंद्रक ज्ञात कीजिए।
उत्तर – (a/3, b/3, c/3)

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. मान लीजिए एक मक्खी एक कमरे में उड़ रही है। कमरे की एक दीवार से 2 मीटर दूर, दूसरी दीवार से 3 मीटर दूर और ज़मीन से 1 मीटर ऊपर है। तो इस मक्खी की स्थिति को हम त्रिविमीय ज्यामिति में कैसे दर्शाएँगे?

› सबसे पहले, हम कमरे के एक कोने को 'मूल बिंदु' (origin) मानेंगे, जहाँ से तीनों अक्ष (x, y, z) शुरू होते हैं।
› अब, पहली दीवार को x-अक्ष के समानांतर मान लें। तो मक्खी की दूरी x-अक्ष की दिशा में होगी: x = 2 मीटर।
› दूसरी दीवार को y-अक्ष के समानांतर मान लें। तो मक्खी की दूरी y-अक्ष की दिशा में होगी: y = 3 मीटर।
› ज़मीन से ऊंचाई को z-अक्ष की दिशा में मान लें। तो मक्खी की ऊंचाई z = 1 मीटर।
› इस प्रकार, मक्खी की स्थिति को हम निर्देशांक (2, 3, 1) से दर्शाएँगे।

उत्तर – मक्खी की स्थिति (2, 3, 1) है।

उदाहरण 2. मान लीजिए एक घर के कोने को मूल बिंदु (0,0,0) माना गया है। दीवार 1 को XY-तल, दीवार 2 को YZ-तल और फर्श को XZ-तल मानें। तो, घर के ठीक बीच में एक बल्ब लटका है। इस बल्ब की स्थिति बताने के लिए हमें किन 'निर्देशांक्षों' और 'निर्देशांक-तलों' का उपयोग करना होगा?

› सबसे पहले, हम यह समझते हैं कि घर का कोना 'मूल बिंदु' है, यानी (0,0,0)।
› दीवार 1 को XY-तल माना गया है। इसका मतलब है कि यह तल 'x-अक्ष' और 'y-अक्ष' से मिलकर बना है।
› दीवार 2 को YZ-तल माना गया है। इसका मतलब है कि यह तल 'y-अक्ष' और 'z-अक्ष' से मिलकर बना है।
› फर्श को XZ-तल माना गया है। इसका मतलब है कि यह तल 'x-अक्ष' और 'z-अक्ष' से मिलकर बना है।
› तो, घर के बीच में लटके बल्ब की स्थिति बताने के लिए हमें x, y, और z तीनों 'अक्षों' (axes) से उसकी दूरी बतानी होगी।
› और ये तीनों अक्ष मिलकर 'निर्देशांक-तलों' को बनाते हैं, जिनसे हमें 3D स्पेस की पूरी जानकारी मिलती है।

उत्तर – बल्ब की स्थिति बताने के लिए हमें x, y, और z 'निर्देशांक्षों' का उपयोग करना होगा, और ये 'निर्देशांक-तल' (XY, YZ, XZ) हमें इन अक्षों की पहचान करने में मदद करेंगे।

उदाहरण 3. एक बिंदु P(-2, 3, -5) किस अष्टांश में स्थित है?

› पहचानें कि x-coordinate का चिन्ह क्या है। यहां x = -2 है, तो चिन्ह 'minus' (-) है।
› पहचानें कि y-coordinate का चिन्ह क्या है। यहां y = 3 है, तो चिन्ह 'plus' (+) है।
› पहचानें कि z-coordinate का चिन्ह क्या है। यहां z = -5 है, तो चिन्ह 'minus' (-) है।
› अब तीनों चिन्हों को क्रम में लिखें: (-, +, -)।
› तालिका से देखें कि कौन से अष्टांश के चिन्ह (-, +, -) होते हैं। यह VI अष्टांश के चिन्ह हैं।

उत्तर – बिंदु P(-2, 3, -5) 'VI अष्टांश' में स्थित है।

उदाहरण 4. अगर एक बिंदु 'P' के 'coordinates' (2, 3, 5) हैं, तो इसका क्या मतलब है?

› पहला 'coordinate', 'x' = 2, बताता है कि यह बिंदु 'y-z plane' से 2 इकाई की दूरी पर है।

› दूसरा 'coordinate', 'y' = 3, बताता है कि यह बिंदु 'x-z plane' से 3 इकाई की दूरी पर है।

› तीसरा 'coordinate', 'z' = 5, बताता है कि यह बिंदु 'x-y plane' से 5 इकाई की दूरी पर है।

उत्तर – तो, P(2, 3, 5) का मतलब है कि बिंदु 'x-अक्ष' पर 2, 'y-अक्ष' पर 3, और 'z-अक्ष' पर 5 की दूरी पर स्थित है।

उदाहरण 5. एक बिंदु P के निर्देशांक क्या होंगे यदि वह z-अक्ष पर स्थित है और मूलबिंदु से उसकी दूरी 5 इकाई है?

› पहला कदम: हमें पता है कि बिंदु z-अक्ष पर स्थित है।

› दूसरा कदम: इसका मतलब है कि इसके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक दोनों शून्य (0) होंगे।

› तीसरा कदम: हमें यह भी दिया है कि मूलबिंदु से इसकी दूरी 5 इकाई है। क्योंकि यह z-अक्ष पर है, तो इसका z-नरि्देशांक 5 होगा।

› चौथा कदम: तो, बिंदु P के निर्देशांक (0, 0, 5) होंगे।

उत्तर – बिंदु P के निर्देशांक (0, 0, 5) होंगे।

उदाहरण 6. बिंदुओं P (1, -3, 4) और Q (-4, 1, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

› यहाँ P(x, y, z) = (1, -3, 4) और Q(x, y, z) = (-4, 1, 2) है।

› दूरी सूत्र का प्रयोग करेंगे: PQ = $((x-x)^2 + (y-y)^2 + (z-z)^2)$

› मान रखेंगे: PQ = $((-4 - 1)^2 + (1 - (-3))^2 + (2 - 4)^2)$

› घटाएंगे: PQ = $((-5)^2 + (1 + 3)^2 + (-2)^2)$

› वर्ग करेंगे: PQ = $((-5)^2 + (4)^2 + (-2)^2) = (25 + 16 + 4)$

› जोड़ेंगे: PQ = (45)

› वर्गमूल निकालेंगे: PQ = $(9 \times 5) = 35$

उत्तर – PQ = 35 इकाई

उदाहरण 7. जाँच कीजिए कि बिंदु A(0, 7, -10), B(1, 6, -6) और C(4, 9, -6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं या नहीं।

› पहले, तीनों बिंदुओं के बीच की दूरियां (AB, BC, CA) दूरी सूत्र का उपयोग करके ज्ञात करें।

› AB = $\text{sqrt}((1-0)^2 + (6-7)^2 + (-6 - (-10))^2) = \text{sqrt}(1^2 + (-1)^2 + 4^2) = \text{sqrt}(1 + 1 + 16) = \text{sqrt}(18)$

› BC = $\text{sqrt}((4-1)^2 + (9-6)^2 + (-6 - (-6))^2) = \text{sqrt}(3^2 + 3^2 + 0^2) = \text{sqrt}(9 + 9 + 0) = \text{sqrt}(18)$

› CA = $\text{sqrt}((0-4)^2 + (7-9)^2 + (-10 - (-6))^2) = \text{sqrt}((-4)^2 + (-2)^2 + (-4)^2) = \text{sqrt}(16 + 4 + 16) = \text{sqrt}(36) = 6$

› अब देखें कि क्या कोई दो दूरियां बराबर हैं। यहाँ AB = sqrt(18) और BC = sqrt(18) हैं।

› चूंकि त्रिभुज की दो भुजाएं AB और BC बराबर हैं, अतः यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

उत्तर – हाँ, बिंदु A(0, 7, -10), B(1, 6, -6) और C(4, 9, -6) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि बिंदु A(1, 2, 3), B(-1, -2, -1), C(2, 3, 2) और D(4, 7, 6) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं, लेकिन यह एक आयत नहीं है।

› पहला कदम, हम चारों भुजाओं की लंबाई निकालेंगे। दूरी सूत्र लगाकर AB, BC, CD और DA की दूरियां ज्ञात करेंगे।

› AB की दूरी नकिालने के लिए, सूत्र लगाएंगे: $\sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

› BC की दूरी: $\sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

› CD की दूरी: $\sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

› DA की दूरी: $\sqrt{(1-4)^2 + (2-7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

› अब देखो, AB = 6 और CD = 6. यानी AB = CD. इसी तरह BC = \(\sqrt{43} \) और DA = \(\sqrt{43} \). यानी BC = DA. क्योंकि सम्मुख भुजाएं बराबर हैं, तो यह एक 'समांतर चतुर्भुज' है।

› दूसरा कदम, अब हम 'विकर्णों' की लंबाई निकालेंगे। विकर्ण AC और BD की दूरियां ज्ञात करेंगे।

› AC की दूरी: \(\sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \)

› BD की दूरी: \(\sqrt{(4-(-1))^2 + (7-(-2))^2 + (6-(-1))^2} = \sqrt{(5)^2 + (9)^2 + (7)^2} = \sqrt{25+81+49} = \sqrt{155} \)

› अब यहां देखो, AC = \(\sqrt{3} \) और BD = \(\sqrt{155} \). क्योंकि AC \(\neq \) BD, यानी विकर्ण बराबर नहीं हैं।

› तो, हम कह सकते हैं कि यह एक 'समांतर चतुर्भुज' है, लेकिन 'आयत' नहीं है।

उत्तर – बिंदु A, B, C, D एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं लेकिन आयत के नहीं।

उदाहरण 9. उन बिंदुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु A(1, 2, 3) और B(3, 2, -1) से समदूरस्थ हैं।

› माना बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

› प्रश्न के अनुसार, बिंदु P, A और B से समदूरस्थ है, इसलिए PA = PB।

› दूरी सूत्र का उपयोग करके $PA^2 = PB^2$ लिखेंगे। इससे वर्गमूल हट जाएगा।

› $PA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$

› $PB^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$

› दोनों को बराबर रखेंगे: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$

› पदों को खोलेंगे: $(x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) + (z^2-6z+9) = (x^2-6x+9) + (y^2-4y+4) + (z^2+2z+1)$

› दोनों तरफ से समान पद (x^2, y^2, z^2, -4y, +4, +9, +1) हटा देंगे।

› -2x - 6z = -6x + 2z

› सभी पदों को एक तरफ ले आएंगे: -2x + 6x - 6z - 2z = 0

› 4x - 8z = 0

› दोनों तरफ 4 से भाग देने पर: x - 2z = 0

उत्तर – बिंदु-समुच्चय का समीकरण x - 2z = 0 है।

उदाहरण 10. एक त्रिभुज ABC का केंद्रक G (1, 1, 1) है। यदि शीर्ष A के निर्देशांक (3, -5, 7) और शीर्ष B के निर्देशांक (-1, 7, -6) हैं, तो बिंदु C के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

› हमें त्रिभुज ABC के शीर्ष A(3, -5, 7) और B(-1, 7, -6) दिए गए हैं।

› केंद्रक G के निर्देशांक (1, 1, 1) भी दिए गए हैं।

› मान लेते हैं कि तीसरे शीर्ष C के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

› केंद्रक के सूत्र के अनुसार: G = ((x1+x2+x3)/3, (y1+y2+y3)/3, (z1+z2+z3)/3)

› तो, x-निर्देशांक के लिए: 1 = (3 + (-1) + x) / 3

› यह हो जाएगा: 1 = (2 + x) / 3 => 3 = 2 + x => x = 1।

› y-नरि्देशांक के लिए: 1 = (-5 + 7 + y) / 3

› यह हो जाएगा: 1 = (2 + y) / 3 => 3 = 2 + y => y = 1।

› z-नरि्देशांक के लिए: 1 = (7 + (-6) + z) / 3

› यह हो जाएगा: 1 = (1 + z) / 3 => 3 = 1 + z => z = 2।

उत्तर – अतः, बिंदु C के निर्देशांक (1, 1, 2) हैं।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा सीधे बोर्ड परीक्षा में नहीं आती, पर इसके बिना आगे के प्रश्न हल करना नामुमकिन है, इसलिए इसे अच्छे से समझना बहुत ज़रूरी है।

• त्रिविमीय ज्यामिति के ये बुनियादी सिद्धांत बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण हैं, क्योंकि इनके बिना आप आगे के कॉन्सेप्ट्स को समझ नहीं पाएंगे। खासकर 'अष्टांशों' और विभिन्न 'तलों' में बिंदुओं की स्थिति से जुड़े प्रश्न अक्सर पूछे जाते हैं।

• बोर्ड परीक्षा में, किसी दिए गए बिंदु के 'Octant' की पहचान करना एक या दो नंबर का सीधा सवाल हो सकता है। चिन्हों की तालिका याद रखना मददगार होगा।

• बोर्ड परीक्षा में 'coordinates' की सही पहचान और किस 'plane' या 'axis' पर कौन सा 'coordinate' शून्य होता है, इस पर आधारित प्रश्न आते हैं। इसे अच्छे से समझना।

• यह अवधारणा सीधे-सीधे प्रश्न में नहीं आती, पर त्रिविमीय ज्यामिति के हर बड़े प्रश्न में इसका इस्तेमाल होता है, इसलिए इसका आधार समझना बहुत ज़रूरी है।

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 3-4 अंकों के प्रश्न के रूप में आता है, जहाँ आपको दिए गए बिंदुओं की संरेखीयता या त्रिभुज के प्रकार की पुष्टि करनी होती है। दूरी सूत्र का सही प्रयोग और गणना में सटीकता बहुत ज़रूरी है।

• इस तरह के प्रश्नों में सारी भुजाओं और विकर्णों की दूरियां सावधानी से निकालें। गणना में छोटी सी गलती भी पूरा उत्तर गलत कर सकती है।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षा में अक्सर 3 से 5 अंकों के प्रश्नों में पूछी जाती है। दूरियों के योग वाले प्रश्न थोड़े लंबे होते हैं, इसलिए उन्हें हल करते समय सावधानी और समय का ध्यान रखें।

• केंद्रक के सूत्रों पर सीधे प्रश्न अक्सर 3-4 अंक के लिए आते हैं, खासकर जब आपको तीसरे शीर्ष के निर्देशांक निकालने हों। गणना में सावधानी रखें!

एक नज़र में रिवीज़न

› 3D में स्थिति बताने हेतु 3 परस्पर लंबवत दूरियाँ (x,y,z) आवश्यक हैं।

› 3D में तीन अक्ष (x, y, z) और तीन तल (xy, yz, zx) होते हैं।

› तीन तल 8 अष्टांश बनाते हैं; प्रत्येक अष्टांश के लिए (x, y, z) चिन्ह निश्चित होते हैं।

› बिंदु P के निर्देशांक (x, y, z) उसकी 3D स्थिति बताते हैं।

› अक्ष/तल पर बिंदु: अक्ष/तल वाले निर्देशांक रहेंगे, बाकी 0।

› दूरी सूत्र से संरेखीयता (PQ+QR=PR) और त्रिभुजों के प्रकार (समकोण, समद्विबाहु) जानें।

› समांतर चतुर्भुज: सम्मुख भुजाएं बराबर; आयत: समांतर चतुर्भुज + विकर्ण बराबर।

› दो बिंदुओं से समदूरस्थ (PA=PB) या दूरियों का योग स्थिर (PA+PB=k) समीकरण।

› केंद्रक: तीनों शीर्षों के निर्देशांकों का औसत ((x1+x2+x3)/3, ...)